30-11-16

↳ Τέλειοι Αριθμοί

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sigma(n)$: άθροισμα θετικών διαιρετών του n

• $\sigma(n)-n$: Άθροισμα γνήσιων θετικών διαιρετών του n

↳ Παρατήρηση: 1) Υπάρχει άπειρο πλήθος θετικών ακεραίων n : $\sigma(n)-n < n$

πχ: Έστω p: πρώτος και $k \in \mathbb{N}$. Τότε αν $n = p^k$, έχουμε:

$\sigma(n)-n = \sigma(p^k)-p^k = 1+p+\dots+p^k-p^k = 1+p+\dots+p^{k-1} =$

$= \dfrac{p^k-1}{p-1} < p^k = n$, διότι αν $\dfrac{p^k-1}{p-1} \geq p^k \Rightarrow$

$\Rightarrow p^k-1 \geq p^{k+1}-p^k \Rightarrow 2p^k \geq p^{k+1}+1$

Άτοπο διότι $p \geq 2$

2) Υπάρχει άπειρο πλήθος θετικών ακεραίων n : $\sigma(n)-n > n$

Πράγματι, έστω $n = 2^k \cdot 3$, $k \geq 2$

$\sigma(n)-n = \sigma(2^k \cdot 3) - 2^k \cdot 3 = \sigma(2^k)\sigma(3) - 2^k \cdot 3 =$

$= (1+2+\dots+2^k)\cdot 4 - 2^k \cdot 3 = \dfrac{2^{k+1}-1}{2-1} \cdot 4 - 2^k \cdot 3 =$

$= (2^{k+1}-1)\cdot 4 - 2^k \cdot 3 > 2^k \cdot 3 = n$, διότι αν $(2^{k+1}-1)\cdot 4 - 2^k\cdot 3 < 2^k \cdot 3$

$\Rightarrow 4\cdot 2^{k+1} - 4 - 2(2^k \cdot 3) = 4\cdot 2^{k+1} - 4 - 2^{k+1}\cdot 3 = 2^{k+1} - 4 < 0$

Άτοπο, διότι $k \geq 2$

Άρα, $\sigma(n) - n > n$

3) Είναι το πλήθος των θετικών ακεραίων $n : \sigma(n) - n = n$ άπειρο; – Άγνωστο !!!

↳ Ορισμός: Ο θετικός ακέραιος n καλείται τέλειος $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma(n) - n = n \Leftrightarrow \sigma(n) = 2n$

Παράδειγμα: • 6: τέλειος, διότι $\sigma(6) = 1+2+3+6 = 12 = 2 \cdot 6$

• 28: τέλειος, διότι: $\sigma(28) = 1+2+4+7+14+28 = 2 \cdot 28$

• 496: τέλειος, • 8.128: τέλειος, • 33.550.336: τέλειος

↳ Μέχρι σήμερα είναι γνωστοί 49 τέλειοι αριθμοί

↳ Δεν είναι γνωστός τέλειος αριθμός ο οποίος να είναι περιττός. Αν υπάρχει, οφείλει να είναι μεγαλύτερος από 10^{1500}

↳ Ο μεγαλύτερος τέλειος που είναι γνωστός έχει 44.677.235 ψηφία

$6 = 2^1 (2^2 - 1)$ → πρώτος

$28 = 2^2 (2^3 - 1)$ → πρώτος

$496 = 2^4 (2^5 - 1)$ → πρώτος

$8.128 = 2^6 (2^7 - 1)$ → πρώτος

Μήπως ισχύει ότι n: άρτιος τέλειος $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, $2^k - 1$: πρώτος

↳ **Θεώρημα:** (Ευκλείδης - Euler)

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε: n άρτιος τέλειος $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, όπου $2^k - 1$: πρώτος

Απόδειξη: $\Leftarrow$ (Ευκλείδης) Έστω ότι $n = 2^{k-1}(2^k-1)$, $2^k - 1$: πρώτος

Τότε: $\sigma(n) = \sigma\left((2^{k-1})\cdot(2^k-1)\right) \overset{\circledast}{=}$

$\circledast$ Αν $d = (2^{k-1}, 2^k - 1)$, τότε $d \mid 2^k - 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} d \mid 2^k \\ d \mid 2^k - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid 1$

Η σ: πολλαπλασιαστική $\Rightarrow \sigma(2^{k-1})\sigma(2^k - 1) =$

$= (1 + 2 + \ldots + 2^{k-1})\cdot(1 + 2^k - 1) = \left(\frac{2^k - 1}{2 - 1}\right)2^k = 2^k(2^k - 1) =$

$= 2(2^{k-1}(2^k - 1)) = 2n \Rightarrow n$: τέλειος

Euler $\Rightarrow$ Έστω n: άρτιος τέλειος

Επειδή ο n: άρτιος $\Rightarrow n = 2^{k-1}\cdot m$, m: περιττός και $k - 1 \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow k \geq 2$

Επειδή n: τέλειος, $\sigma(n) = 2n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n = 2\cdot 2^{k-1}\cdot m = \sigma(2^{k-1}\cdot m) \underset{\substack{m:\text{ περιττός} \\ (2^{k-1}, m) = 1}}{=} \sigma(2^{k-1})\sigma(m) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^k \cdot m = \sigma(2^{k-1})\sigma(m)$

Όμως, $\sigma(2^{k-1}) = (1+2+\dots+2^{k-1}) = \frac{2^k-1}{2-1} = 2^k-1$

Άρα: $2^k \cdot m = (2^k-1)\sigma(m)$ (1)

Από την (1), $2^{k-1} \mid 2^k m \Rightarrow (2^k-1, 2^k) = 1$

Άρα, $2^k-1 \mid m \Rightarrow m = (2^k-1)m'$, $m' \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m = (2^k-1)m'$ (2)

$m+m' = (2^k-1)m' + m' = m'(2^k-1+1) = m' \cdot 2^k$

Άρα, $m+m' = m' \cdot 2^k$ (3)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Από την (1)} \Rightarrow 2^k \cdot m = (2^k-1)\sigma(m) \\ \text{Από την (2)} \Rightarrow m = (2^k-1)m'\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2^k(2^k-1)m' = (2^k-1)\sigma(m) \Rightarrow \sigma(m) = 2^k \cdot m'$ (4)

Από τις (3), (4) $\Rightarrow m+m' = \sigma(m)$

Άρα οι μόνοι θετικοί διαιρέτες του m είναι: m, m'

Συνεπώς, $m' = 1 \Rightarrow m = 2^k-1$

Οπότε m: πρώτος (5)

Άρα, $n = 2^{k-1}(2^k-1)$, όπου 2^k-1: πρώτος

↳ Παρατήρηση: Αν ο 2^p-1: πρώτος, τότε ο p: πρώτος

(Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει)

Απόδειξη: Έστω ότι ο 2^p-1 είναι πρώτος και ο p είναι σύνθετος

Άρα, $p = r \cdot s$, $1 < r, s < p$

Τότε: $2^p - 1 = 2^{r \cdot s} - 1 = (2^r)^s - 1 =$

$= (2^r-1)\left((2^r)^{s-1} + (2^r)^{s-2} + \dots + 2^r + 1\right)$

Άτοπο, διότι 2^p-1: πρώτος

Συνεπώς και ο p: πρώτος

↳ Ορισμός: Ένας αριθμός α καλείται αριθμός του Mersenne $\iff \alpha = 2^k - 1$

Ο α καλείται πρώτος του Mersenne αν ο α είναι πρώτος

↳ Θεώρημα: Η αντιστοιχία από τους άρτιους τέλειους αριθμούς και τους πρώτους του Mersenne είναι 1-1 και επί.

$$\left\{ \text{Άρτιοι Τέλειοι} \right\} \rightleftarrows \left\{ \text{Πρώτοι του Mersenne} \right\}$$

$$\left(2^{p-1}(2^p-1)\right) \qquad \left(2^p - 1\right)$$

↳ Πρώτοι του Fermat

Ένας αριθμός α καλείται αριθμός του Fermat $\Leftrightarrow \alpha = 2^m + 1$, $m \in \mathbb{N}$

Ο α καλείται πρώτος του Fermat $\Leftrightarrow$ ο α: πρώτος

↳ Παρατήρηση: Αν ο $2^m + 1$ είναι πρώτος τότε ο m είναι $m = 2^n$ για $n \geq 1$

Αν το m δεν είναι δύναμη του 2, τότε ο m έχει ένα περιττό διαιρέτη και τότε το $m = r \cdot s$ όπου s: περιττός, $r > 1$

Τότε: $2^m + 1 = 2^{r \cdot s} + 1 = (2^r)^s + 1 =$

$= (2^r + 1)((2^r)^{s-1} - (2^r)^{s-2} + \ldots + 1)$: άτοπο, διότι

$2^m + 1$: πρώτος. Άρα $m = 2^n$, $n \geq 1$

↳ Οι πρώτοι του Fermat είναι της εξής μορφής:

$2^{2^n} + 1$, όπου ο $2^{2^n} + 1$: πρώτος

πχ: $n = 0 \Rightarrow 2^{2^0} + 1 = 2 + 1 = 3$: πρώτος του Fermat

$n = 1 \Rightarrow 2^{2^1} + 1 = 5$: πρώτος του Fermat

$n = 2 \Rightarrow 2^{2^2} + 1 = 17$: πρώτος του Fermat

$n = 3 \Rightarrow 2^{2^3} + 1 = 257$: πρώτος του Fermat

$n = 4 \Rightarrow 2^{2^4} + 1 = 65537$: πρώτος του Fermat

Gauss: Για $n=5$, ο $2^{2^5}+1$ <u>δεν</u> είναι πρώτος

διότι $641 \mid 2^{2^5}+1$